

# Mecánica Celeste

## Examen VII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Mecánica Celeste

## Examen VII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

**Asignatura** Mecánica Celeste.

**Curso Académico** 2025-26.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Grupo** A.

**Profesor** Margarita Arias López.

**Descripción** Primer Parcial.

**Fecha** 6 de Noviembre de 2025.

**Duración** 1 hora y 30 minutos.

**Ejercicio 1** (4 puntos). Sea  $x : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  una solución de la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

Determina de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$ ,  $x(t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  y pertenece al plano  $\{x_2 = 0\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- b) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$ , la órbita  $x(t)$  está acotada.
- c) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$ , el área que barre el segmento que une  $x(t)$  con el origen varía a velocidad  $\sqrt{2}/2$ .
- d) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (-3, 0, -3)$ , la órbita recorre la semi-recta  $\{((1, 0, 1)s : s > 0)\}$ ,  $\omega$  es finito y  $x(t)$  se aproxima al origen cuando  $t \rightarrow \omega$ .

**Ejercicio 2** (3 puntos). Desde un observatorio astronómico se está controlando un meteorito que se aproxima a Marte siguiendo la órbita

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = k$$

en un sistema de referencia sobre el plano del movimiento con origen en el centro de masas de Marte y unidades en miles de kilómetros. El meteorito se encuentra aún muy lejos y no se puede precisar con exactitud el valor de  $k > 0$ . Se pide:

- a) Determinar el tipo de órbita que describe y la energía total del movimiento.
- b) Calcular la distancia mínima del meteorito a Marte y su velocidad en el punto de mínima distancia en términos del valor de  $k$ .<sup>1</sup>
- c) Si se supone que el radio de Marte es aproximadamente de 3,5 unidades, ¿tienen los marcianos que empezar a preparar las maletas?<sup>2</sup>

**Ejercicio 3** (3 puntos). Un satélite describe una órbita circular en sentido anti-horario a altura 1 alrededor de un planeta de masa  $1/G$  y radio 3.

- a) Determina el módulo de la velocidad a la que orbita en cada instante y el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a su órbita.
- b) En el instante en que el satélite pasa por la vertical del polo norte del planeta se aumenta su velocidad en un 20 % manteniendo la misma dirección. Determina cómo se modifica su órbita.

---

<sup>1</sup>los resultados se pueden dejar en términos de  $\mu$  también.

<sup>2</sup>Nos preguntan si se va a chocar el meteorito con el planeta.

**Ejercicio 1** (4 puntos). Sea  $x : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  una solución de la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

Determina de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$ ,  $x(t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  y pertenece al plano  $\{x_2 = 0\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Dado que estamos en un c.f.c. (campo de fuerzas centrales), sabemos que el momento angular será constante. Podemos obtener

$$c(0) = x(0) \wedge \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, -3, 0) \implies |c| \neq 0.$$

Por la Primera Ley de Kepler, como estamos en un campo newtoniano, el movimiento estará contenido en una de las tres siguientes cónicas; elipse, parábola o hipérbola, y el intervalo de definición maximal del movimiento será  $(\alpha, \omega) = \mathbb{R}$ . También sabemos por la clasificación de movimientos según el módulo del momento angular, que  $x(t) \in \Pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , con  $\Pi = \{c\}^\perp$ , es decir, el plano que tiene vector normal  $c$ , y pasa por el origen. Dicho plano verifica la ecuación

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0 \xrightarrow{(x_1, x_2, x_3) = (0, -3, 0)} -3x_2 = 0 \xrightarrow{-3 \neq 0} x_2 = 0$$

por lo tanto, la afirmación es verdadera.

- b) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$ , la órbita  $x(t)$  está acotada.

Por el apartado anterior sabemos que  $|c| \neq 0$ , y nuevamente la órbita  $x(t)$  quedará contenida en una elipse, parábola o hipérbola. La única manera de que la órbita esté acotada es que  $h < 0$ . De lo contrario, la cónica sería una parábola o hipérbola, ambas con trayectorias abiertas, y, por tanto, no están acotadas. Obtenemos entonces la energía total

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{1}{|x(0)|} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9 - \sqrt{2}}{2} \approx 3,79 \geq 0$$

y como la trayectoria no es elíptica (de hecho es hiperbólica), no estará acotada, y la afirmación es falsa.

- c) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$ , el área que barre el segmento que une  $x(t)$  con el origen varía a velocidad  $\sqrt{2}/2$ .

Sabemos, por la Segunda Ley de Kepler, que la velocidad areolar tiene por fórmula

$$v_{\text{areolar}} = \frac{|c|}{2}$$

así como que por el primer apartado  $c = (0, -3, 0) \implies |c| = 3$ , y sustituyendo vemos que

$$v_{\text{areolar}} = \frac{3}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego la afirmación es falsa.

- d) Si  $x(0) = (1, 0, 1)$  y  $\dot{x}(0) = (-3, 0, -3)$ , la órbita recorre la semi-recta  $\{(1, 0, 1)s : s > 0\}$ ,  $\omega$  es finito y  $x(t)$  se aproxima al origen cuando  $t \rightarrow \omega$ .

Primero, vemos que  $\dot{x}(0) = -3x(0)$ , es decir, ambos vectores son paralelos, luego  $\widehat{x(0), \dot{x}(0)} = 0$ , y  $|c| = 0$ . Por la teoría de clasificación de movimientos según el módulo del momento angular, sabemos que el movimiento es rectilíneo, y  $x(t) = r(t)v$ , con  $v \equiv x(t)/|x(t)|$ ,  $|v| = 1$ , y  $x(t) \in \mathbb{R}_+v$ , es decir, el movimiento se da a lo largo de la semirrecta con extremo inferior en el origen, y la dirección y sentido de  $v$ . Como

$$v = \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{x(0)}{|x(0)|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} \parallel (1, 0, 1)$$

la primera parte del enunciado es cierta. Ahora, hay dos opciones para que el resto sea cierto, y es que  $h < 0$ , con lo cual habría un cambio de monotonía en  $r$  y se cumplirían ambas cosas, o que  $h \geq 0$ , y  $\dot{r} < 0$ , ubicándonos entonces en el caso en que  $-\infty = \alpha < \omega < +\infty$ , y  $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$ . La primera opción se descarta viendo el signo de la energía total

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{1}{|x(0)|} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{18 - \sqrt{2}}{2} \approx 8,29 \geq 0.$$

Por teoría, la energía total en este tipo de movimiento también verifica

$$h = \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 - \frac{1}{|r(t)|}$$

y usando que  $h > 0$

$$h = \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 - \frac{1}{|r(t)|} > 0 \iff \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 > \frac{1}{|r(t)|} \iff |\dot{r}(t)| > \sqrt{\frac{2}{|r(t)|}}$$

como  $r(t) > 0 \implies |r(t)| > 0$  y  $\sqrt{\frac{2}{|r(t)|}} > 0$ , luego

$$|\dot{r}(t)| > \sqrt{\frac{2}{|r(t)|}} > 0$$

En particular,  $\dot{r}(t) \neq 0$  para cualquier  $t > 0$ . Como  $r$  es una función continua (por ser solución), entonces  $r$  es estrictamente monótona, con lo que basta obtener  $\dot{r}(t_0)$  para algún  $t_0 > 0$  para determinar el crecimiento o decrecimiento estricto de  $r$ . Como

$$\dot{r}(t) \stackrel{|v|=1}{=} \dot{r}(t) \langle v, v \rangle = \langle \dot{r}(t)v, v \rangle \stackrel{\dot{x}(t)=\dot{r}(t)v}{=} \langle \dot{x}(t), v \rangle$$

en particular, para  $t = 0$

$$\dot{r}(0) = \langle \dot{x}(0), v \rangle = -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{0}{\sqrt{2}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} < 0.$$

Concluimos finalmente que  $\dot{r} < 0$ , luego, por lo explicado en el segundo caso de la distinción que hemos hecho, la afirmación es verdadera.

**Ejercicio 2** (3 puntos). Desde un observatorio astronómico se está controlando un meteorito que se aproxima a Marte siguiendo la órbita

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = k$$

en un sistema de referencia sobre el plano del movimiento con origen en el centro de masas de Marte y unidades en miles de kilómetros. El meteorito se encuentra aún muy lejos y no se puede precisar con exactitud el valor de  $k > 0$ . Se pide:

- a) Determinar el tipo de órbita que describe y la energía total del movimiento.

Para ello, basta determinar el vector de excentricidad, por comparación directa de la ecuación de una cónica con foco en el origen  $|x| + \langle e, x \rangle = k$ , con la dada  $\sqrt{x^2 + y^2} + x = k$ . Por un lado,  $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , luego necesariamente será  $\langle e, x \rangle = x \iff e = (1, 0)$ . Así,  $\varepsilon = |e| = 1$ , y estamos ante un movimiento parabólico.

Para la energía total, podríamos calcularla como hemos hecho en el ejercicio anterior, o usar la relación

$$2h|c|^2 = \mu^2(\varepsilon^2 - 1) \stackrel{\varepsilon^2=1}{=} 0 \stackrel{|c| \neq 0}{\iff} h = 0$$

y concluir que la energía total del movimiento es 0 (hemos usado que el movimiento es parabólico, luego  $|c| \neq 0$ ).

- b) Calcular la distancia mínima del meteorito a Marte y su velocidad en el punto de mínima distancia en términos del valor de  $k$ .<sup>3</sup>

Usando la expresión en polares de  $|x| + \langle e, x \rangle = k$

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}$$

como  $e = \varepsilon(\cos \omega, \sin \omega)$  y  $\varepsilon = 1$ , por igualación directa tenemos que  $e = (1, 0) = (\cos \omega, \sin \omega) \iff \cos \omega = 1 \wedge \sin \omega = 0 \iff \omega = 0$  (salvo múltiplo entero de  $2\pi$ ).

La ecuación entonces de la parábola es

$$r = \frac{k}{1 + \cos(\theta)}$$

y la distancia mínima del meteorito a Marte se obtiene cuando el denominador es máximo, es decir,  $\cos(\theta) = 1$ , y tal punto es

$$r_{\min} = \frac{k}{1 + 1} = \frac{k}{2} \text{ m}$$

---

<sup>3</sup>los resultados se pueden dejar en términos de  $\mu$  también.



Por la definición de energía total

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{1}{|x(t)|}$$

y por ser el movimiento parabólico hemos visto que  $h = 0$ , luego, juntando ambas cosas

$$0 = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{1}{|x(t)|} \iff \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 = \frac{1}{|x(t)|} \iff |\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2}{|x(t)|}}$$

y sustituyendo  $|x(t)|$  por el periastro  $r_{\min}$ , obtenemos dicha velocidad, suponiendo que  $t_*$  es el instante de tiempo en que el meteorito se encuentra a la mínima distancia

$$|\dot{x}(t_*)| = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{k}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{4}{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k}}{k} \text{ m/s}$$

y como  $k > 0$ , dicho valor tiene sentido (usamos las unidades del SI, luego  $[k] = [\text{m}]$ )

- c) Si se supone que el radio de Marte es aproximadamente de 3,5 unidades, ¿tienen los marcianos que empezar a preparar las maletas?<sup>4</sup>

Chocarán en el caso de que  $r_{\min} \leq R$ , con  $R$  el radio de marte. Por lo tanto, planteamos la inecuación sustituyendo ambos valores.

$$\frac{k}{2} \text{ m} \leq 3,5 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \iff k \text{ m} \leq 7 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Así pues

si  $k \leq 7 \cdot 10^6 \text{ m}$ , el meteorito chocará con el planeta. De lo contrario, no habrá colisión.

---

<sup>4</sup>Nos preguntan si se va a chocar el meteorito con el planeta.

**Ejercicio 3** (3 puntos). Un satélite describe una órbita circular en sentido anti-horario a altura 1 alrededor de un planeta de masa  $1/G$  y radio 3.

La situación es la que se muestra en la Figura 1, con  $R = 3$  m, y masa  $M = 1/G$  kg.

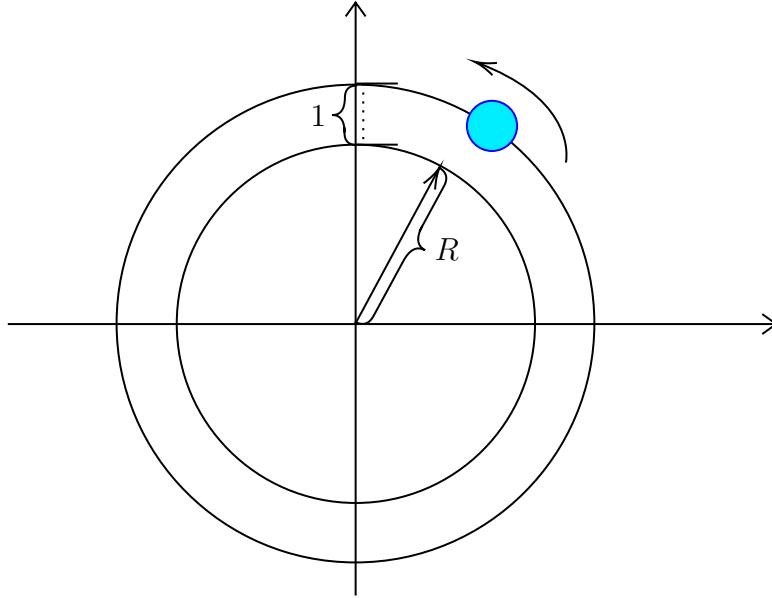


Figura 1: Esquema Ejercicio 3.

- a) Determina el módulo de la velocidad a la que orbita en cada instante y el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a su órbita.

En primer lugar, el radio de órbita del satélite será  $r = R + 1 = 3 + 1 = 4$  m. Ahora, consideramos el campo gravitatorio newtoniano dado por la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x$$

como  $M = 1/G \implies \mu = GM = 1 \text{ m}^3/\text{s}^2$  y la ecuación resulta en

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

Por teoría, sabemos que  $x_r(t) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$  es solución de esta ecuación si y solo si

$$|\omega| = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}} = \frac{1}{r^{3/2}}$$

Por la Física de Bachillerato también sabemos que la velocidad lineal es la angular por el radio, es decir,

$$v = |\omega|r = \frac{1}{r^{3/2}}r = \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r} \text{ m/s}$$

Como  $r = 4$  m, entonces el módulo de la velocidad en cada instante es

$$v = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

El tiempo que tarda un satélite en dar una vuelta completa a su órbita no es más que el periodo, que sabemos que se relaciona con la velocidad angular por medio de

$$p = \frac{2\pi}{|\omega|} \text{ s} = 2\pi r^{3/2} = 2\pi 4^{3/2} = 2\pi 8 = 16\pi \text{ s}$$

Por lo tanto

El módulo de la velocidad a la que orbita en cada instante el satélite es  $v = 0.5$  m/s y su periodo es  $p = 16\pi$  s.

- b) En el instante en que el satélite pasa por la vertical del polo norte del planeta se aumenta su velocidad en un 20 % manteniendo la misma dirección. Determina cómo se modifica su órbita.

La situación es la que se muestra en la Figura 2, denotando con subíndice 0 y 1 a las magnitudes antes y después del impulso, respectivamente.

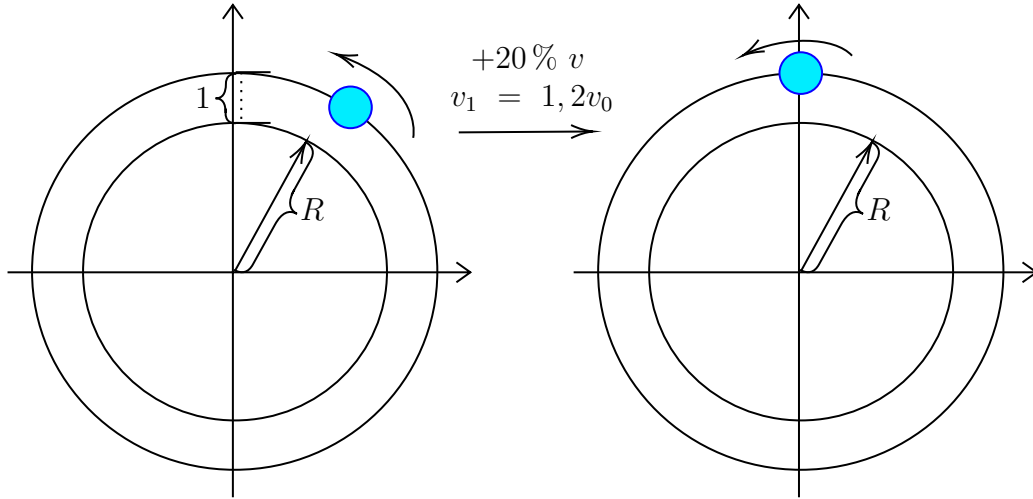


Figura 2: Esquema Ejercicio 3 Apartado b)

Para obtener el módulo del momento angular, primero recordamos que

$$|c| = |x(t)| |\dot{x}(t)| \widehat{\text{sen}}(x(t), \dot{x}(t)).$$

Como estamos en un MCU,  $x(t) = r$ , y  $\dot{x}(t) = v$ , y la velocidad es perpendicular al movimiento, luego  $\widehat{\text{sen}}(x(t), \dot{x}(t)) = 1$ . Antes del impulso

$$v_0 = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

$$h_0 = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$|c_0| = rv_0 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Después del impulso, el módulo de la velocidad se incrementa en un 20 %, y la dirección se mantiene, luego

$$v_1 = 1,2v_0 = 1,2 \cdot \frac{1}{2} = 0,6 = \frac{3}{5}$$

$$h_1 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{100} < 0$$

$$|c_1| = rv_1 = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

Por la Primera Ley de Kepler, como  $|c_1| \neq 0$ , entonces el movimiento se da en una cónica, y como  $h_1 < 0$ , dicha cónica será una elipse.

Podemos obtener las magnitudes y puntos notables que determinan la nueva trayectoria. Primero obtenemos el semieje mayor, usando las siguientes relaciones

$$2h|c|^2 = \mu^2(\varepsilon^2 - 1); \quad k = \frac{|c|^2}{\mu} \iff |c|^2 = \mu k; \quad a = \frac{k}{1 - \varepsilon^2} \iff k = a(1 - \varepsilon^2)$$

Despejando  $h$  de la primera, y sustituyendo  $|c|^2$  y  $k$  de la segunda y tercera, respectivamente, obtenemos

$$h = \frac{\mu^2(\varepsilon^2 - 1)}{2|c|^2} = \frac{\mu^2(\varepsilon^2 - 1)}{2\mu k} = \frac{\mu(\varepsilon^2 - 1)}{2a(1 - \varepsilon^2)} = -\frac{\mu(1 - \varepsilon^2)}{2a(1 - \varepsilon^2)} \stackrel{(*)}{=} -\frac{\mu}{2a}$$

donde en  $(*)$  hemos usado que la trayectoria es elíptica, luego

$$\varepsilon < 1 \implies \varepsilon^2 < 1 \implies \varepsilon^2 - 1 < 0 \implies 1 - \varepsilon^2 > 0 \implies 1 - \varepsilon^2 \neq 0$$

El semieje mayor  $a_1$  será

$$h_1 = -\frac{\mu}{2a_1} \iff 2a_1 = -\frac{\mu}{h_1} \iff a_1 = -\frac{\mu}{2h_1} = -\frac{1}{2 \cdot (-7/100)} = \frac{50}{7} \approx 7,14 \text{ m}$$

La excentricidad de la órbita elíptica puede obtenerse despejando en

$$2h|c|^2 = \mu^2(\varepsilon^2 - 1)$$

como sigue

$$2h|c|^2 = \mu^2(\varepsilon^2 - 1) \iff 2h|c|^2 = \mu^2\varepsilon^2 - \mu^2 \iff 2h|c|^2 + \mu^2 = \mu^2\varepsilon^2 \iff$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2h|c|^2 + \mu^2}{\mu^2} \iff \varepsilon = \sqrt{\frac{2h|c|^2 + \mu^2}{\mu^2}}$$

Tomando las magnitudes post-impulso

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{2h_1|c_1|^2 + \mu^2}{\mu^2}} = \sqrt{\frac{2(-7/100)(12/5)^2 + 1}{1^2}} = \frac{11}{25} = 0,44$$

Podemos obtener también el semieje menor, sustituyendo en la relación

$$b_1 = a_1\sqrt{1 - \varepsilon_1^2} = (50/7)\sqrt{1 - (11/25)^2} = \frac{12\sqrt{14}}{7} \approx 6,4143 \text{ m}$$

y el nuevo centro de la elipse

$$|C_1| = \frac{\varepsilon_1 k}{1 - \varepsilon_1^2} = \frac{\varepsilon_1 a_1(1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1^2} = \frac{(11/25)(50/7)(1 - (11/25)^2)}{1 - (11/25)^2} = \frac{22}{7} \approx 3,14 \text{ m}$$

Por último, las distancias al periastro y apoastro se obtienen, respectivamente, como

$$r_{\min} = \frac{k}{1 + \varepsilon} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon} \quad r_{\max} = \frac{k}{1 - \varepsilon} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon}$$

luego podemos calcularlas

$$r_{\min_1} = \frac{a_1(1 - \varepsilon_1^2)}{1 + \varepsilon_1} = \frac{(50/7)(1 - (11/25)^2)}{1 + (11/25)} = 4 \text{ m}$$

$$r_{\max_1} = \frac{a_1(1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1} = \frac{(50/7)(1 - (11/25)^2)}{1 - (11/25)} = \frac{72}{7} \approx 10,29 \text{ m}$$

y el cambio de órbita se muestra en la Figura 3

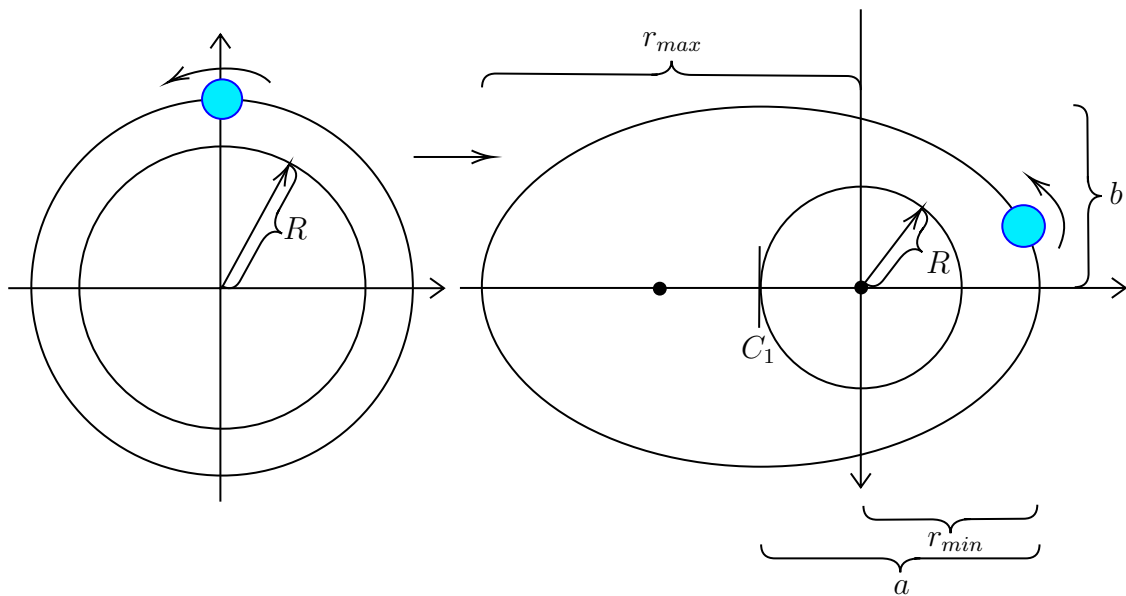


Figura 3: Cambio de Órbita del Ejercicio 3 Apartado b)

Nótese la rotación de  $90^\circ$  en sentido horario que se ha hecho para tener la representación usual de la elipse, y que se puede hacer por la autonomía de las soluciones del campo newtoniano, y, por tanto, por la invarianza frente a isometrías.